

Μαθηματικά Γ Λυκείου / 1.963 ασκήσεις για την Γ Λυκείου

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

Περιεχόμενα

Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

Κεφάλαιο 1

Όριο – συνέχεια συνάρτησης

(735 ασκήσεις)

Ενότητα 1

Συναρτήσεις

► Κατηγορία 1

Θεμελιώδεις έννοιες των συναρτήσεων1

- 1η ομάδα (21 ασκήσεις)

Πεδίο ορισμού συνάρτησης1

- 2η ομάδα (5 ασκήσεις)

Σύνολο τιμών συνάρτησης3

- 3η ομάδα (10 ασκήσεις)

Συναρτησιακές σχέσεις3

- 4η ομάδα (9 ασκήσεις)

Προβλήματα. Συνδυαστικές ασκήσεις5

► Κατηγορία 2

Γραφική παράσταση συνάρτησης8

- 1η ομάδα (20 ασκήσεις)

Γραφική παράσταση μίας συνάρτησης8

• 2η ομάδα (15 ασκήσεις)	
Γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων	11
• 3η ομάδα (5 ασκήσεις)	
Γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και μία ευθεία	13
► Κατηγορία 3	
Άρτια - περιττή συνάρτηση (14 ασκήσεις)	15
► Κατηγορία 4	
Ισότητα συναρτήσεων (11 ασκήσεις)	17
► Κατηγορία 5	
Άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο συναρτήσεων (14 ασκήσεις)	19
► Κατηγορία 6	
Σύνθεση συναρτήσεων (37 ασκήσεις)	21
► Κατηγορία 7	
Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης	26
• 1η ομάδα (19 ασκήσεις)	
Να βρείτε την μονοτονία μιας συνάρτησης	26
• 2η ομάδα (5 ασκήσεις)	
Μονοτονία και εξισώσεις	29
• 3η ομάδα (11 ασκήσεις)	
Μονοτονία και ανισώσεις	29
• 4η ομάδα (6 ασκήσεις)	
Ακρότατα συνάρτησης	32
► Κατηγορία 8	
Συνάρτηση 1-1. Αντίστροφη συνάρτηση	33
• 1η ομάδα (24 ασκήσεις)	
Συνάρτηση 1-1	33

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- 2η ομάδα (16 ασκήσεις)
Αντίστροφη συνάρτηση36

Ενότητα 2

Όριο συνάρτησης – «Υπολογιστικά» θέματα ορίων

► Κατηγορία 9

Η απροσδιοριστία «μηδέν διά μηδέν»40

- 1η ομάδα (25 ασκήσεις)
Με ρητή συνάρτηση40
- 2η ομάδα (16 ασκήσεις)
Με ρίζες42
- 3η ομάδα (30 ασκήσεις)
Με τριγωνομετρικές παραστάσεις (τριγωνομετρικά όρια)44
- 4η ομάδα (8 ασκήσεις)
Με απόλυτες τιμές47

► Κατηγορία 10

Η απροσδιοριστία «αριθμός διά μηδέν» (30 ασκήσεις)48

► Κατηγορία 11

Όριο συνάρτησης στο άπειρο51

- 1η ομάδα (15 ασκήσεις)
Με πολυώνυμο ή ρητή συνάρτηση51
- 2η ομάδα (6 ασκήσεις)
Με απόλυτες τιμές53
- 3η ομάδα (7 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «άπειρο διά άπειρο» με ρίζες53

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- **4η ομάδα** (10 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «συν άπειρο πλην άπειρο» με ρίζες54
- **5η ομάδα** (12 ασκήσεις)
Εκθετικά όρια στο άπειρο55
- **6η ομάδα** (14 ασκήσεις)
Λογαριθμικά όρια στο άπειρο56
- **7η ομάδα** (9 ασκήσεις)
Τριγωνομετρικά όρια στο άπειρο57

Ενότητα 3

Όριο συνάρτησης – «Θεωρητικά» θέματα ορίων

► **Κατηγορία 12**

«Θεωρητικά» θέματα στο πεπερασμένο όριο συνάρτησης σε σημείο59

- **1η ομάδα** (18 ασκήσεις)
Γενικά θέματα στα «θεωρητικά» όρια59
- **2η ομάδα** (12 ασκήσεις)
Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου ώστε ένα όριο να υπάρχει
ή να έχει συγκεκριμένη τιμή62
- **3η ομάδα** (24 ασκήσεις)
Να βρείτε το όριο μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται μέσα σε όριο
με γνωστή τιμή64
- **4η ομάδα** (21 ασκήσεις)
Να βρείτε το όριο μιας συνάρτησης, όταν δίνεται διπλή ανισότητα
ή όταν δίνεται μονή ανισότητα67

► **Κατηγορία 13**

«Θεωρητικά» θέματα στο μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης σε σημείο

(27 ασκήσεις)71

► **Κατηγορία 14**

«Θεωρητικά» θέματα στο όριο συνάρτησης στο άπειρο (25 ασκήσεις)75

Ενότητα 4

Συνέχεια συνάρτησης

► **Κατηγορία 15**

Συνέχεια συνάρτησης79

- **1η ομάδα** (39 ασκήσεις)

Να εξετάσετε/να δείξετε/ξέρετε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής
(σε σημείο ή σε διάστημα)79

- **2η ομάδα** (9 ασκήσεις)

Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε μια συνάρτηση να είναι
συνεχής (σε σημείο ή σε διάστημα)85

Ενότητα 5

Θεωρήματα στην συνέχεια συνάρτησης

► **Κατηγορία 16**

Βασικά θεωρήματα στην συνέχεια συνάρτησης88

- **1η ομάδα** (10 ασκήσεις)

Πρόσημο συνάρτησης88

- **2η ομάδα** (10 ασκήσεις)

Να βρείτε τον τύπο της f από σχέση με $f^2(x)$ 90

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- **3η ομάδα** (5 ασκήσεις)
Σύνολο τιμών συνάρτησης. Γενικές ασκήσεις91

► **Κατηγορία 17**

Θεώρημα του Bolzano. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών93

- **1η ομάδα** (36 ασκήσεις)
Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα
(σε ένα ανοικτό διάστημα)93
Περιλαμβάνονται και ασκήσεις με ζητούμενο «δύο τουλάχιστον ρίζες»
και «μοναδική ρίζα».
- **2η ομάδα** (27 ασκήσεις)
Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός (ενός ανοικτού διαστήματος)
ο οποίος ικανοποιεί μια σχέση99
- **3η ομάδα** (20 ασκήσεις)
Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα ή να δείξετε ότι
υπάρχει αριθμός ο οποίος ικανοποιεί μια σχέση, αλλά το ζητούμενο
διάστημα να είναι κλειστό (σε ένα τουλάχιστον από τα άκρα του)103

|| **Επανάληψη στο κεφάλαιο των ορίων**

|| **Γενικές ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο**

Οι εκφωνήσεις όλων των γενικών ασκήσεων (**28 ασκήσεις**)107

Κεφάλαιο 2

Διαφορικός Λογισμός

(750 ασκήσεις)

Παράγραφος 1

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

► Κατηγορία 1

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο116

- 1η ομάδα (40 ασκήσεις)

Να εξετάσετε/να δείξετε/ξέρετε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη

σε ένα σημείο116

- 2η ομάδα (5 ασκήσεις)

Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε μια συνάρτηση να είναι

παραγωγίσιμη σε ένα σημείο122

Παράγραφος 2

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Παράγωγος συνάρτησης. Κανόνες παραγωγίσιμης.

► Κατηγορία 2

Κανόνες παραγωγίσιμης124

- 1η ομάδα (36 ασκήσεις)

Παράγωγος αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου, πηλίκου συναρτήσεων

ή συνδυασμού αυτών των πράξεων124

- 2η ομάδα (27 ασκήσεις)

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης126

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- **3η ομάδα** (6 ασκήσεις)
Παράγωγος συνάρτησης διπλού τύπου (γενικώς, πολλαπλού τύπου)128
- **4η ομάδα** (14 ασκήσεις)
Γενικές ασκήσεις στις παραγωγίσιμες συναρτήσεις και τους κανόνες παραγωγίσης129

Παράγραφος 3

Κανόνες του de l' Hospital

► **Κατηγορία 3**

Κανόνες του de l' Hospital132

- **1η ομάδα** (24 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «μηδέν διά μηδέν»132
- **2η ομάδα** (12 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «άπειρο διά άπειρο»134
- **3η ομάδα** (15 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «συν άπειρο πλην άπειρο»135
- **4η ομάδα** (10 ασκήσεις)
Η απροσδιοριστία «μηδέν επί άπειρο»136
- **5η ομάδα** (14 ασκήσεις)
Όριο με συνάρτηση της μορφής $[f(x)]^{g(x)}$ 137
- **6η ομάδα** (8 ασκήσεις)
Γενικές ασκήσεις στους κανόνες του de l' Hospital138

Παράγραφος 4

Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης συνάρτησης

► Κατηγορία 4

Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης συνάρτησης140

- 1η ομάδα (11 ασκήσεις)

Να βρείτε τις ασύμπτωτες μιας συνάρτησης140

- 2η ομάδα (7 ασκήσεις)

Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε γνωστή ευθεία να είναι

ασύμπτωτη μιας συνάρτησης141

- 3η ομάδα (13 ασκήσεις)

Γενικές ασκήσεις στις ασύμπτωτες143

Παράγραφος 5

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης

► Κατηγορία 5

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης146

- 1η ομάδα (17 ασκήσεις)

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, όταν δίνεται η τετμημένη ή

η τεταγμένη του σημείου επαφής147

- 2η ομάδα (10 ασκήσεις)

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, όταν δεν δίνεται το σημείο

επαφής, αλλά μια ιδιότητα που έχει η εφαπτομένη150

- 3η ομάδα (8 ασκήσεις)

Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η εφαπτομένη

έχει κάποια ιδιότητα151

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- **4η ομάδα** (9 ασκήσεις)
Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε η εφαπτομένη σε γνωστό σημείο να έχει κάποια ιδιότητα152
- **5η ομάδα** (3 ασκήσεις)
Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες δύο γραφικών παραστάσεων154
- **6η ομάδα** (7 ασκήσεις)
Δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο (ισοδύναμα, δύο γραφικές παραστάσεις εφάπτονται)154
- **7η ομάδα** (20 ασκήσεις)
Ευθεία εφάπτεται στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης156
- **8η ομάδα** (23 ασκήσεις)
Γενικές ασκήσεις στην εφαπτομένη159

Παράγραφος 6

Ρυθμός μεταβολής

► Κατηγορία 6

Ρυθμός μεταβολής (30 ασκήσεις)164

Παράγραφος 7

Θεώρημα του Rolle

► Κατηγορία 7

Θεώρημα του Rolle173

- **1η ομάδα** (4 ασκήσεις)
Να εξετάσετε/να δείξετε/ξέρετε ότι μια συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle σε ένα διάστημα ή να βρείτε τις τιμές παραμέτρων, ώστε μια συνάρτηση να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις

του θεωρήματος του Rolle	173
• 2η ομάδα (13 ασκήσεις) Να δείξετε ότι μια εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε ένα ανοικτό διάστημα	174
• 3η ομάδα (9 ασκήσεις) Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός ενός ανοικτού διαστήματος, ο οποίος ικανοποιεί μια σχέση	176
• 4η ομάδα (6 ασκήσεις) Να δείξετε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα (γενικώς, το πολύ κ ρίζες)	178
• 5η ομάδα (7 ασκήσεις) Να δείξετε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική ρίζα (σε ένα ανοικτό διάστημα)	179
• 6η ομάδα (5 ασκήσεις) Στο ζητούμενο εμφανίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης	180

Παράγραφος 8

Θεώρημα Μέσης Τιμής

► Κατηγορία 8

Θεώρημα Μέσης Τιμής	181
• 1η ομάδα (4 ασκήσεις) Στα δεδομένα ή το ζητούμενο υπάρχει (ή μπορεί να δημιουργηθεί) το πηλίκο του συμπεράσματος του Θ.Μ.Τ	181
• 2η ομάδα (10 ασκήσεις) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί σε ένα διάστημα, οι οποίοι ικανοποιούν μια σχέση (συνήθως με κάποια πράξη μεταξύ τιμών της	

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

παραγώγου)	182
• 3η ομάδα (5 ασκήσεις) Να δείξετε ότι ισχύει μια διπλή ανισότητα με αλγεβρικές παραστάσεις ή αριθμούς	184
• 4η ομάδα (5 ασκήσεις) Υπάρχει σχέση για την πρώτη παράγωγο (συνήθως ανισότητα), στα δεδομένα ή και στο ζητούμενο	184
• 5η ομάδα (9 ασκήσεις) Συνδυαστικές ασκήσεις με τα θεωρήματα Bolzano, Rolle και Θ.Μ.Τ	185

Παράγραφος 9

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

► Κατηγορία 9

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής	188
• 1η ομάδα (10 ασκήσεις) Να δείξετε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή	188
• 2η ομάδα (32 ασκήσεις) Να βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης ή να δείξετε ότι είναι κάποιος συγκεκριμένος	190

Παράγραφος 10

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

► Κατηγορία 10

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης	195
---	-----

• 1η ομάδα (38 ασκήσεις)	
Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης	196
Α. Με πολυωνυμικές, ρητές, τριγωνομετρικές και άρρητες συναρτήσεις.	
Με συναρτήσεις διπλού τύπου (20 ασκήσεις)	196
Β. Με συναρτήσεις οι οποίες έχουν εκθετικούς ή/και λογαριθμικούς	
όρους (και συναρτήσεις διπλού τύπου) (18 ασκήσεις)	197
• 2η ομάδα (14 ασκήσεις)	
Να δείξετε ότι ισχύει μια ανισότητα με παραστάσεις του x	199
• 3η ομάδα (7 ασκήσεις)	
Να δείξετε ότι ισχύει μια ανισότητα μεταξύ τιμών μιας συνάρτησης	
(σύγκριση αριθμών)	200
• 4η ομάδα (10 ασκήσεις)	
Να δίνεται ότι ισχύει μια ανισοισότητα με παραστάσεις του x	
(θεώρημα Fermat)	201
• 5η ομάδα (5 ασκήσεις)	
Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε μια συνάρτηση να είναι	
γνησίως αύξουσα/γνησίως φθίνουσα	203
• 6η ομάδα (6 ασκήσεις)	
Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε μια συνάρτηση να έχει	
ακρότατο σε συγκεκριμένη θέση (θεώρημα Fermat)	203
• 7η ομάδα (6 ασκήσεις)	
Να βρείτε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης	204
• 8η ομάδα (10 ασκήσεις)	
Να δείξετε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική ρίζα	205
• 9η ομάδα (12 ασκήσεις)	
Να βρείτε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης ή να δείξετε ότι μια	
εξίσωση έχει συγκεκριμένο πλήθος ριζών	207

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

• 10η ομάδα (25 ασκήσεις)	
Να λύσετε μια εξίσωση	208
• 11η ομάδα (15 ασκήσεις)	
Να λύσετε μια ανίσωση	211
• 12η ομάδα (9 ασκήσεις)	
Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης	213
• 13η ομάδα (37 ασκήσεις)	
Γενικές ασκήσεις στην μονοτονία και τα ακρότατα.	
Προβλήματα με χρήση ακροτάτων	214

Παράγραφος 11

Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης. Χάραξη γραφικής παράστασης.

► Κατηγορία 11

Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης221

• 1η ομάδα (17 ασκήσεις)	
Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης	221
• 2η ομάδα (4 ασκήσεις)	
Να βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου, ώστε μια συνάρτηση να είναι κοίλη/κυρτή ή να παρουσιάζει καμπή σε κάποιο σημείο	222
• 3η ομάδα (14 ασκήσεις)	
Γενικές ασκήσεις στην κυρτότητα	223
• 4η ομάδα (2 ασκήσεις)	
Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης	226

Μαθηματικά Γ Λυκείου / 1.963 ασκήσεις για την Γ Λυκείου

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

Επανάληψη στο κεφάλαιο των παραγώγων

Γενικές ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

Οι εκφωνήσεις όλων των γενικών ασκήσεων (30 ασκήσεις)227

Κεφάλαιο 3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

(360 ασκήσεις)

Ενότητα 1

Αρχική συνάρτηση

► Κατηγορία 1

Αρχική συνάρτηση (19 ασκήσεις)237

Ενότητα 2

«Υπολογιστικά» θέματα ολοκληρωμάτων

► Κατηγορία 2

«Υπολογιστικά» θέματα ολοκληρωμάτων240

- 1η ομάδα (31 ασκήσεις)

«Απλά» ολοκληρώματα240

- 2η ομάδα (30 ασκήσεις)

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (παραγοντική ολοκλήρωση)244

- 3η ομάδα (26 ασκήσεις)

Μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής (μέθοδος της αντικατάστασης)247

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

- **4η ομάδα** (30 ασκήσεις)
Ολοκλήρωμα σύνθετης συνάρτησης (ολοκλήρωση με χρήση του
διαφορικού μιας συνάρτησης)250
- **5η ομάδα** (20 ασκήσεις)
Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης253

Ενότητα 3

«Θεωρητικά» θέματα ολοκληρωμάτων

► **Κατηγορία 3**

«Θεωρητικά» θέματα ολοκληρωμάτων256

- **1η ομάδα** (38 ασκήσεις)
Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων και βασικοί υπολογισμοί256
- **2η ομάδα** (48 ασκήσεις)
Μέθοδοι ολοκλήρωσης263
 - A. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (**13 ασκήσεις**)263
 - B. Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής (και ολοκλήρωμα της
αντίστροφης συνάρτησης) (**35 ασκήσεις**)266
- **3η ομάδα** (25 ασκήσεις)
Ολοκληρώματα και ανισότητες273

Ενότητα 4

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

► **Κατηγορία 4**

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου278

- **1η ομάδα** (23 ασκήσεις)
Εμβαδόν επίπεδου χωρίου, το οποίο σχηματίζεται από μία συνάρτηση

■ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

■ Πού θα βρεις αυτό που ψάχνεις

και τον άξονα $x'x$ (και μία ή δύο κατακόρυφες ευθείες)278

• 2η ομάδα (27 ασκήσεις)

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου, το οποίο σχηματίζεται από δύο

συναρτήσεις (και μία ή δύο κατακόρυφες ευθείες)282

Επανάληψη στο κεφάλαιο των ολοκληρωμάτων

Γενικές ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

Οι εκφωνήσεις όλων των γενικών ασκήσεων (43 ασκήσεις)286

Θέματα με ρυθμό μεταβολής

Επαναληπτικά θέματα με ερωτήματα τα οποία περιλαμβάνουν

ρυθμό μεταβολής (30 ασκήσεις)303

Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016 – 2025

► Θέματα Α

Οι εκφωνήσεις όλων των θεμάτων Α (22 θέματα)321

• Έτος 2016

Κανονικές εξετάσεις321

Επαναληπτικές εξετάσεις322

• Έτος 2017

Κανονικές εξετάσεις323

Επαναληπτικές εξετάσεις324

• Έτος 2018

Κανονικές εξετάσεις325